30.9.

Definiční obor funkcí

$D_f = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \text{ je definováno}\}$

1) $f(x) =$ polynom (konst., lineární, kvadr., kubický, ...)
$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = |x| \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

3) odmocnina $f(x) = \sqrt[k]{x}$

k liché $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

k sudé $\Rightarrow D_f = \langle 0, +\infty)$

4) racionální lomené fce

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $p(x), q(x) =$ polynomy

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ q(x) = 0\}$

5) $f(x) = a^x$ exponenciála $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

6) $f(x) = \log_a x$ logaritmus $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}_+$

II. Posloupnosti a limity

Def: posloupnost je uspořádaná řada reálných čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$

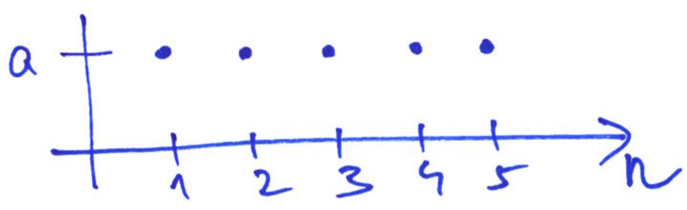
- konečná posl. $(a_1, a_2, \dots, a_N)$
  také píšeme $\{a_n\}_{n=1}^{N}$
- nekonečná posl. $(a_1, a_2, a_3, \dots)$
  píšeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$n \in \mathbb{N}$ ... index
$a_n \in \mathbb{R}$ ... n-tý člen posloupnosti

Základní příklady:

① Konstantní posloupnost

$\forall n \in \mathbb{N}: a_n = a$ ($a \in \mathbb{R}$ ... pevné číslo)



1

② aritmetická posl.

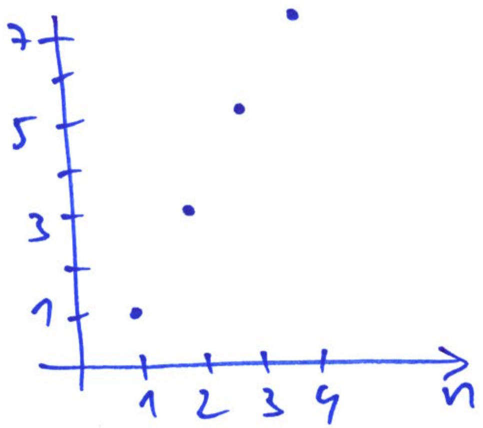
je posl. tvaru $a_n = k \cdot n + c$

kde $k, c \in \mathbb{R}$ jsou pevná, $k \neq 0$

Př: $a_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ (nekonečná)

$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7, \dots$

(posl. lichých čísel)



body leží na přímce $y = k \cdot x + c$

Platí:
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= k \cdot (n+1) + c \\ a_n &= k \cdot n + c \end{aligned} \Big\} \text{ odečteme}$$

$$a_{n+1} - a_n = k$$

Rozdíl dvou po sobě jdoucích členů aritm. posloupnosti je roven $\underline{k}$.

③ geometrická posl.

je posl. tvaru $a_n = b \cdot q^n$

kde $b, q \in \mathbb{R}$, $b, q \neq 0$

Platí:
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b \cdot q^{n+1} \\ a_n &= b \cdot q^n \end{aligned} \Big\} \text{ vydělíme}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{b \cdot q^n} \cdot q^1}{\cancel{b \cdot q^n}} = q$$

Podíl dvou po sobě jdoucích členů geom. posloupnosti je roven $\underline{q}$.

q = kvocient

Př: $a_n = 2^n$ $(q = 2, b = 1)$

$n = 1, \dots, 10$

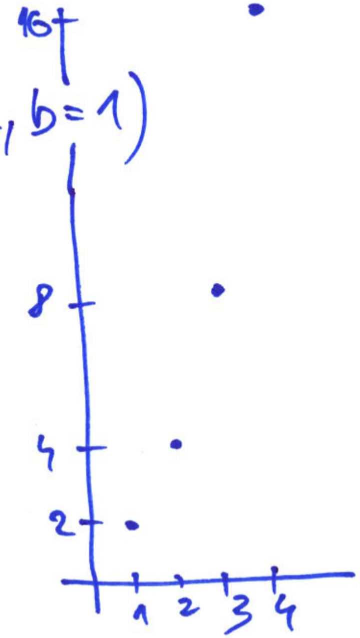
$a_1 = 2^1 = 2$

$a_2 = 2^2 = 4$

$a_3 = 2^3 = 8$

$\vdots$

$a_{10} = 2^{10} = 1024$



2

tato posloupnost rychle roste – „geometrickou řadou“

odpovídá to fci exponenciála (2^x)

– „roste to exponenciálně“

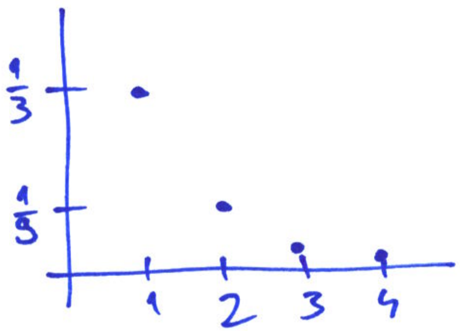
Př: $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$a_1 = \frac{1}{3}$

$a_2 = \frac{1}{9}$ $\quad \cdot \frac{1}{3}$

$a_3 = \frac{1}{27}$ $\quad \cdot \frac{1}{3}$

$\vdots$



zde posl. velmi rychle klesá

Další příklady posloupností dostaneme z těchto zákl. příkladů operacemi $+, -, \cdot, :$ a kombinací s dalšími funkcemi.

Př: $a_n = \dfrac{2n+4}{(3n-1)\cdot(2n+6)}$

$b_n = \dfrac{3^n - 2^n}{6\cdot 4^n + 5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

$c_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+3}$ atd. atd.

Dále budeme uvažovat pouze nekonečné posloupnosti a jejich chování pro $n \to \infty$.

3

Př: Uvažujme posloupnost

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

n	a_n
1	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
2	$\frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$
3	$\frac{7}{4} = 1{,}75$
$\vdots$	
10	$\frac{21}{11} \doteq 1{,}919$
$\vdots$	
100	$\frac{201}{101} \doteq 1{,}99$
$\vdots$	
1000	$\frac{2001}{1001} \doteq 1{,}999$

Vypadá to, že se hodnoty a_n blíží k číslu 2.

Může se hodnota a_n rovnat přesně 2, nebo dokonce být > 2 (pro nějaké $n \in \mathbb{N}$)?

Pokud $a_n = 2$, tedy $\frac{2n+1}{n+1} = 2 \quad / \cdot (n+1)$

$$2n+1 = 2(n+1)$$
$$\cancel{2n}+1 = \cancel{2n}+2$$
$$1 = 2 \quad \text{Nemá řešení.}$$

Tedy <u>neexistuje</u> žádné n, pro něž by platilo $a_n = 2$. (Podobně – ani $a_n > 2$.)

Číslu 2 v tomto příkladě říkáme <u>limita</u> posloupnosti:

Nastavíme-li odchylku od limity (tj. od 2), lze najít n, pro něž a_n se do této odchylky vejde.

Říkáme také: „posl. a_n se blíží nekonečně blízko k číslu 2", „limitně se blíží…"

4

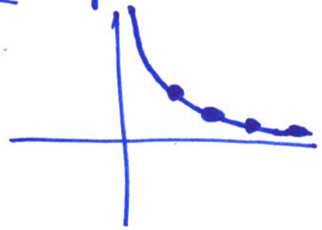
Def: posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má **limitu** $a \in \mathbb{R}$, pokud se členy posloupnosti a_n blíží nekonečně blízko k číslu a (pro n jdoucí do ∞). Také říkáme, že pos. a_n **konverguje** k číslu a.

Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ $\quad(\lim a_n = a)$

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $\quad(a_n \to a)$

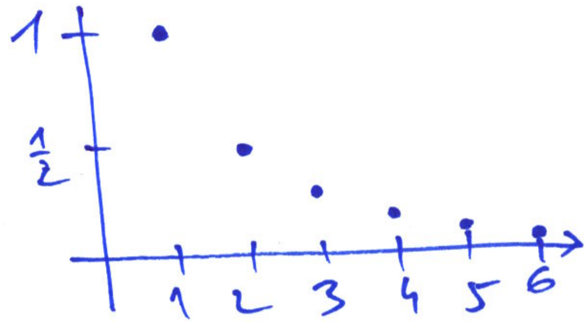
Pozn: hodnota $\frac{1}{n}$ není nikdy 0

Pozn: pos. $\frac{1}{n}$ odpovídá fce $\frac{1}{x}$



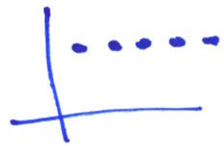
body leží na hyperbole $\frac{1}{x}$

Příklady: (1) $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$



$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

(2) konstantní pos. $a_n = a$



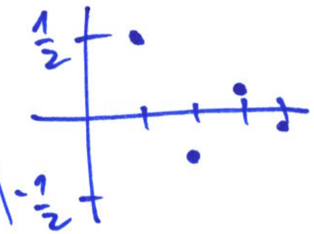
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a}$$

Zde jsou $\forall$ členy rovny limitě.

(3) $a_n = (-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

je to geom. pos., $b = -1$, $q = -\frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{8}$, $a_4 = -\frac{1}{16}$, ...



$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

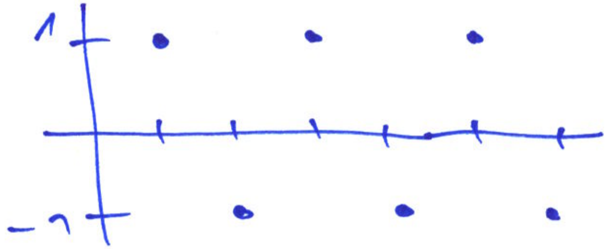
střídá znaménka

5

(4) $a_n = (-1)\cdot(-1)^n$

geometrická, $b=-1$, $q=-1$

$a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$



$\boxed{\text{Nemá žádnou limitu!}}$

Totiž: každá posl. má nejvýše jednu limitu (tj. jednu nebo žádnou).

Pokud posl. nemá žádnou reálnou limitu, říkáme, že posl. divergује.

Def.: posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nekonečnou limitu $(+\infty)$, pokud hodnoty a_n rostou nade všechny meze (pro $n\to\infty$).

Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

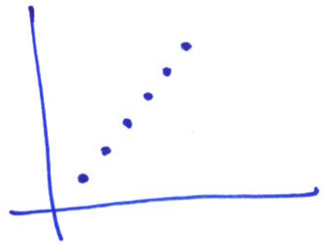
Říkáme, že posl. divergује do $+\infty$.

Podobně definujeme i limitu $-\infty$:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pokud $\lim(-a_n) = +\infty$.

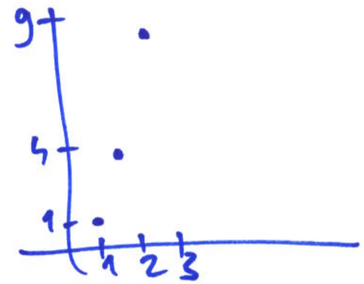
Př.: 1) $a_n = n$

$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

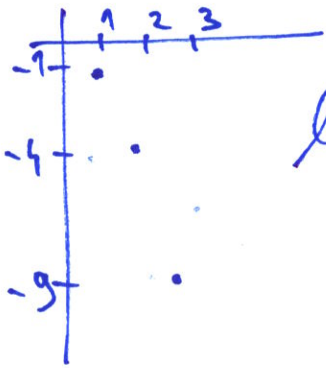


2) $a_n = n^2$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$



3) $a_n = -n^2$



$\lim(-n^2) = -\infty$